物性研究 36－4(1981－7)

# Volterra 方程式の 1-periodic 解について

若竹塾(神戸市灘区)勤務　成　田　和　明

(1981年6月3日受理)

〔I〕 積分可能な非線型離散系である戸田格子の多重周期解の中で，もっともシンプルな 1-periodic waveの解が初等数学の公式の直接の応用としても得られるのはよく知られた事柄である。このメモでは同じ観点からVolterra 系

$$\dot{N}_n = (N_{n-1} - N_{n+1}) N_n \tag{1}$$

及びその特解である 1-periodic wave 解を若干拡張する試みをのべる。新しい系にはあまりはっきりした物理的意味がつけられないが，得られた公式は普通の本の中には載っていない模様である。

(A) 方 程 式

$$\frac{d}{dt}\left(\prod_{\ell=1}^{m} A_{n+\ell}\right)^{-1} = A_{n+m+1} - A_n \qquad (m=1,2,\cdots\cdots) \tag{2}$$

は $x=\alpha n+\beta t$, $k$ を母数とすれば，特解として

$$N_n = \prod_{\ell=0}^{m} A_{n+\ell}$$

$$= -\frac{\beta\cdot \mathrm{sn}\, m\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha\cdot \mathrm{sn}\,(m+1)\alpha}\left\{1-k^2\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,(m+1)\alpha\cdot\mathrm{sn}\left(x+\frac{m}{2}\alpha\right)\cdot\mathrm{sn}\left(x-\frac{m}{2}\alpha\right)\right\} \tag{3}$$

という 1-periodic wave 解をもつ。

(B) 方 程 式

$$\frac{d}{dt}\prod_{\ell=1}^{m} B_{n+\ell} = B_{n+1} - B_{n+m} \quad (m=2,3,\cdots\cdots) \tag{4}$$

は特解として

NARITA, kazuaki

$$M_n = \left(\prod_{\ell=1}^{m-1} B_{n+\ell}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{\beta \,\mathrm{sn}\, m\alpha}{\mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{sn}(m-1)\alpha}\left\{1 + k^2 \mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{sn}(m-1)\alpha \cdot \mathrm{sn}\left(x + \frac{m}{2}\alpha\right) \cdot \mathrm{sn}\left(x - \frac{m}{2}\alpha\right)\right\} \quad (5)$$

という 1-periodic wave 解をもつ。これら二つの場合の証明は容易である（$A_n$ 又は $B_n$ は const・$\vartheta_4(\alpha(n+1)+\beta t)\vartheta_4(\alpha(n-1)+\beta t)/[\vartheta_4(\alpha n+\beta t)]^2$ のように仮定すればよい）ので省略する。(A) において $m=1$ の場合がVolterra 系(1) の特解である1-periodic wave 解に相当する。

〔II〕 (3)において $k \to 1$ の limit をとると方程式(2)の1-solitonが得られる。 $N_n$ のみたす方程式では変数を $t'/t = N_n/N_n' = -\dfrac{\beta \,\mathrm{sh}\, m\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha \cdot \mathrm{sh}\,(m+1)\alpha}$ となるように $(N_n, t)$ から $(N_n', t')$ にあらためてもよいから，結局(1)の 1-soliton 解として

$$N_n = 1 + \frac{2\,\mathrm{sh}\,\alpha \cdot \mathrm{sh}\,(m+1)\alpha}{\mathrm{ch}\,2\left\{\alpha n - \dfrac{\mathrm{sh}\alpha \cdot \mathrm{sh}\,(m+1)\alpha}{\mathrm{sh}\, m\alpha} \cdot t\right\} + \mathrm{ch}\, m\alpha} \quad (6)$$

が得られ，方程式(4)に対しても同じようにして 1-soliton 解が

$$M_n = 1 - \frac{2\,\mathrm{sh}\,\alpha \cdot \mathrm{sh}(m-1)\alpha}{\mathrm{ch}\,2\left\{\alpha n - \dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha \cdot \mathrm{sh}(m-1)\alpha}{\mathrm{sh}\, m\alpha} \cdot t\right\} + \mathrm{ch}\, m\alpha} \quad (7)$$

のように得られる。連続体近似におけるもとの方程式又これらの soliton の interaction がどうなっているのかなど著者には不明である。

## 参考文献

1) F. Bowman; *Introduction to Elliptic Functions with Applications,* Dover Publ. (1961).